Dérivabilité et étude de fonctions

1 Dérivabilite en un point et sur un intervalle

Définitions :

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a, b \in I$ tels que $a < b$.
⋆ On dit que f est dérivable au point a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.
l s'appelle le nombre dérivé de f au point a et sera noté $f'(a)$. On écrit : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
⋆ On dit que f est dérivable à droite au point a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.
l s'appelle le nombre dérivé à droite de f au point a et sera noté $f'_d(a)$. On écrit : $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$.
⋆ On dit que f est dérivable à gauche au point a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.
l s'appelle le nombre dérivé à gauche f au point a et sera noté $f'_g(a)$. On écrit : $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$.
⋆ On dit que f est dérivable sur I s'elle est dérivable en tout point de I.
⋆ On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ s'elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b .

Proposition :

$$f \text{ est dérivable au point } a \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite de } a \\ f \text{ est dérivable à gauche de } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

Conséquences :

⋆ Si f est dérivable au point a alors (C_f) admet une tangente d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ au point $(a, f(a))$.
⋆ Si f est dérivable à droite au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geqslant a \end{cases}$ au point $(a, f(a))$.
⋆ Si f est dérivable à gauche au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leqslant a \end{cases}$ au point $(a, f(a))$.
⋆ Si f est dérivable au point a, la fonction g définie par $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de f au voisinage de a et on a :

$$x \simeq a \Longrightarrow f(x) \simeq g(x)$$

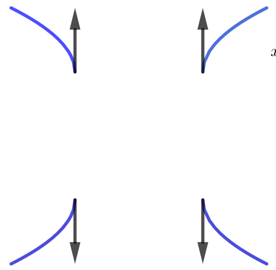
Exemple :

$$f(x) = \sqrt{x},\ a = 1 \Longrightarrow g(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$1,01 \simeq 1 \Longrightarrow f(1,01) \simeq g(1,01) \Longrightarrow \sqrt{1,01} \simeq 1,005$$

⋆ Si $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$.

$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$



$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

2 Les opérations sur les fonctions dérivables

Proposition :

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :
⋆ $f+g$ est dérivable sur I et on a : $(f+g)' = f' + g'$.
⋆ αf est dérivable sur I et on a : $(\alpha f)' = \alpha f'$.
⋆ Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.
⋆ Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = -\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Proposition :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $f \circ g$ est dérivable et on a : $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

Proposition :

Soit f une fonction bijective et dérivable sur I telle que $f(I) = J$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(\forall x \in J) \ : \ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Conséquences :

⋆ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : \ (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

⋆ Si $f > 0$ et dérivable sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

⋆ arctan est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

⋆ Si f est dérivable sur I alors $\arctan \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(\arctan \circ f)' = \dfrac{f'}{1+f^2}$
⋆ Si $f > 0$ et dérivable sur I alors f^r est dérivable sur I avec $r \in \mathbb{Q}^*$ et on a : $(f^r)' = r f' f^{r-1}$

3 Théorème d'accroissements finies (TAF) - théorème de Rolle

Théorème :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \textit{ est continue sur } [a,b] \\ f \textit{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases} \overset{TAF}{\Longrightarrow} \quad (\exists c \in]a,b[) : \; f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Théorème :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \textit{ est continue sur } [a,b] \\ f \textit{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \overset{Rolle}{\Longrightarrow} \quad (\exists c \in]a,b[) : \; f'(c) = 0$$

4 Les primitives d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle fonction primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$.

Proposition :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(X) + C$ où C est une constante réelle.

Proposition :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Si f admet une fonction primitive sur I alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Proposition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.
Si F et G sont deux fonctions primitives de f et g respectivement sur I, alors $F + kG$ est une primitive de $f + kg$ sur I.

Tableau des primitives des fonctions usuelles

la fonction f	les primitives de f	intervalle
$x \mapsto k, \; k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c, \; c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, \; n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \; c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + c, \; c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}, \; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{n-1} . \dfrac{1}{x^{n-1}} + c, \; c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c, \; c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$

la fonction f	les primitives de f	intervalle
$x \mapsto x^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Tableau des primitives et les opérations .

la fonction f définie sur I	une primitive de f sur I	conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$u'v + v'u$	uv	
$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{(\sqrt[n]{u})^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	$u > 0$ sur I
$u'u^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$u > 0$ sur I
$x \mapsto u'(ax+b),\ a \in \mathbb{R}^*\ et\ a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}u(ax+b)$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$

5 Les branches infinies

Les branches infinies

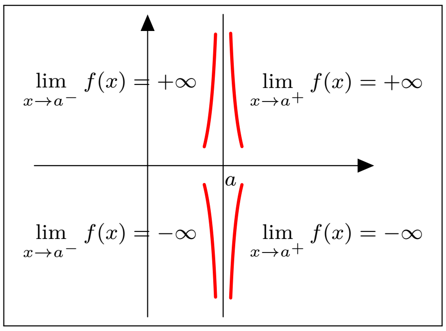
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$: la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$: (C_f) admet une branche parabolique suivant $(D) : y = ax$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: (C_f) admet une branche parabolique suivant (OX)
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$: (C_f) admet une branche parabolique suivant (OY)
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta$: la droite $x = \beta$ est une asymptote horizontale
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$: la droite $x = \alpha$ est une asymptote verticale

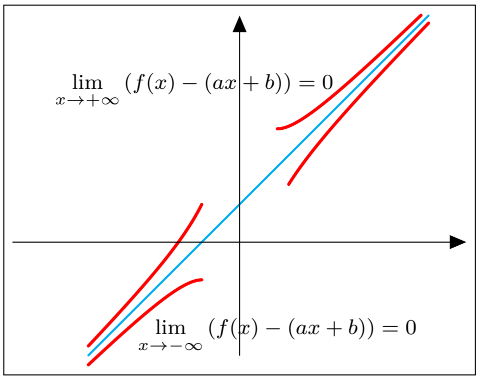
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ $\iff \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

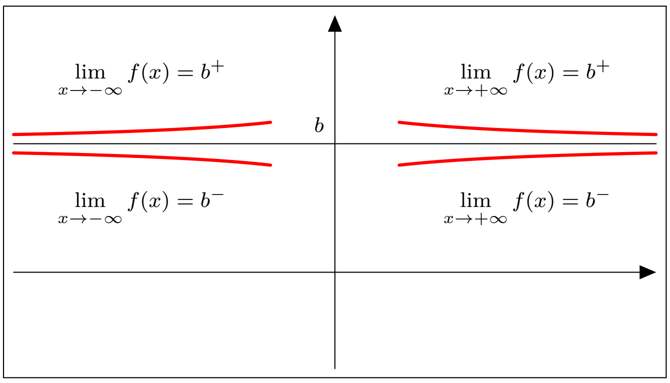
Attention ⚠

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \nRightarrow$ (C_f) admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

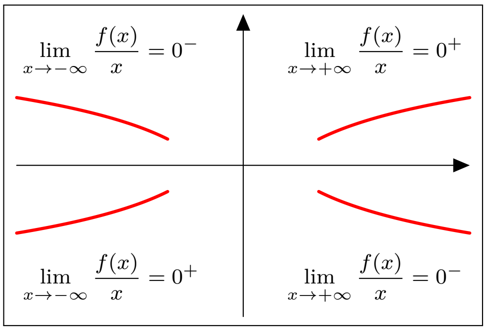
Asymptotes :

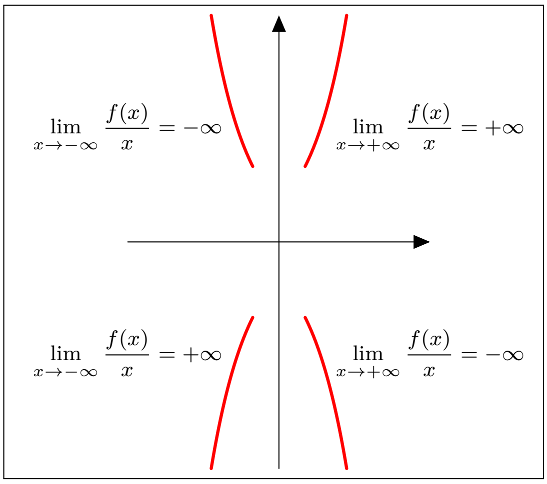


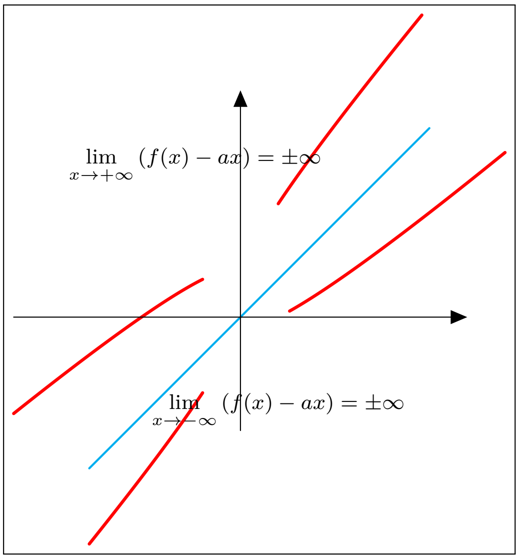




Les branches paraboliques :







6 Concavité

x		a	
f''	$-$	0	$+$
(C_f)	concave		convexe

x		a	
f''	$+$	0	$-$
(C_f)	convexe		concave

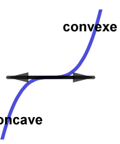
$M(a, f(a))$ est un point d'inflexion

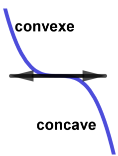
Proposition :

Si f" s'annule en a de I et change de signes au voisinage de a, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

Proposition :

Si f' s'annule en a de I et ne change pas de signes au voisinage de a, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

$f' \geqslant 0$ 

$f' \leqslant 0$ 

7 Parité - symétrie - périodicité

Parité - periodicité :

type de f	définition	conséquences
f est paire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	$\star$ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ $\star$ (C_f) est symetrique par % à (OY)
f est impaire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	$\star$ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ $\star$ (C_f) est symetrique par % à O
f est périodique de période T $(T > 0)$	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} x + T \in D_f \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T

Symetrie :

propriètè	équivalent à	conséquences
la droite $x = a$ est un axe de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$
la point $\Omega(a, b)$ est un centre de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$